View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Sächsische Landesbibliothek - Staats- und...

Karl-Heinz Schlote, Martina Schneider (eds.)

Mathematics meets physics

A contribution to their interaction in the 19th and the first half of the 20th century

Verlag Harri Deutsch

Mathematische und phänomenologische Strenge: Distributionen in der Quantenmechanik und -feldtheorie

Klaus-Heinrich Peters

1 Einleitung

1.1 Einführung

Die Geschichte des Gebrauchs der mathematischen Theorie der Distributionen ist immer auch die Geschichte der Frage, wie es in der Physik mit mathematischer Strenge gehalten werden soll. Gerade die Mathematik, die heute unter dem Namen «Theorie der Distributionen» bekannt ist, lässt auch immer die Möglichkeit offen, es mit der Mathematik nicht so exakt zu nehmen und mit Distributionen zu rechnen wie mit normalen Funktionen – allerdings um den Preis mathematischer Strenge. Die Geschichte der theoretischen Physik ist voller Beispiele, wie das nicht-exakte Rechnen mit Distributionen zu mathematischen Problemen auch in allgemein anerkannten physikalischen Theorien führte, und genauso gab es auch immer wieder Anstrengungen, die mathematischen Defizite der Theorien durch exakte Formulierungen zu beheben. Solche Anstrengungen mathematisch orientierter Physiker oder physikalisch orientierter Mathematiker wurden von einem großen Teil der Physiker-Gemeinschaft eher misstrauisch betrachtet, da mathematisch korrekte Reformulierungen selten etwas physikalisch Neues ergeben und den Formalismus im Allgemeinen abstrakter, schwerer verständlich und weniger alltagstauglich machen.

Allerdings ist es auffällig, dass bei einer Vielzahl der Anstrengungen, auch in der theoretischen Physik einen einwandfreien und korrekten Gebrauch der Mathematik einzuklagen, eine starke im philosophischen Sinne phänomenologische Orientierung deutlich wird: Im Ruf nach mathematischer Exaktheit steckt offenbar auch immer ein Ruf nach einer streng phänomenologischen Auslegung der Physik.

Anhand von drei Beispielen aus der Geschichte des Gebrauchs von Distributionen in der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie sollen hier die Indizien für die enge Verknüpfung von mathematischer und phänomenologischer Strenge dargelegt werden.

Zunächst sollen aber einige begriffliche, mathematische und historische Vorbemerkungen erfolgen.

1.2 Phänomenologische Strenge

Als erstes soll hier präzisiert werden, was der Begriff der «phänomenologischen Strenge» überhaupt bedeuten soll.

Bekanntlich gelang Heisenberg 1925 der Durchbruch zu einem ersten Formalismus der Quantenmechanik[1]. Dabei ging er von dem «philosophischen Prinzip» aus, nur noch beobachtbare Tatsachen in der Theorie zu verknüpfen. Entsprechend war dann die Matrizenmechanik aufgebaut: Die Matrixelemente entsprechen direkt den spektroskopischen Daten, die bei einem konkreten Experiment tatsächlich herauskommen. Dagegen werden Begriffe, die prinzipiell nicht beobachtet werden können, ganz aus der Theorie ausgeschlossen – bestes Beispiel ist der Begriff der «Umlaufbahn eines Elektrons». Dass dies keine falsche Bescheidenheit Heisenbergs, sondern eine in der Physik selbst angelegte Notwendigkeit ist, zeigte sich dann in der weiteren Entwicklung der Quantenmechanik. Dort wurde deutlich, dass man sogar Widersprüche erhält, wenn man auch nur an der hypothetischen Existenz von prinzipiell unbeobachtbaren Begriffen festhält. Beim Doppelspaltexperiment etwa darf man nicht einmal annehmen, dass das Photon zwischen zwei Beobachtungen durch einen der Spalte gegangen ist. Grundidee ist hier offenbar, auf alle idealen, faktisch nicht beobachtbaren Größen ganz zu verzichten, und nur die Phänomene – also die Beobachtungsdaten – untereinander naturgesetzlich zu verknüpfen.

Während die klassische Physik noch darauf beruhte, die Phänomene erst zu überspringen und sie dann aus dahinterliegenden eigentlichen Ursachen zu erklären, erhalten wir nun einen Vorrang der Tatsachen vor den Ursachen: Es wird keine hinter den Phänomenen liegende ideale Wirklichkeit mehr angesetzt. In der Quantenmechanik müssen nun die Phänomene direkt mathematisch beschrieben und untereinander ohne Rückgriff auf eine verborgene Realität verknüpft werden. Dieser Grundzug des Denkens, der in der Kopenhagener Quantenmechanik seinen stärksten Ausdruck findet, soll nun phänomenologische Strenge heißen: *Dass die mathematische Verknüpfung der Tatsachen auch wirklich an den Tatsachen selber ansetzt, ohne sich auf dahinterliegende Ursachen zu beziehen.*

[1] Heisenberg 1925

Ziel der Ausführung wird es also sein, einige Indizien dafür zusammenzustellen, dass und wie mathematische Strenge aufs Engste mit phänomenologischer Strenge in dem so definierten Sinne verknüpft ist.

1.3 Distributionen

Distributionen sind lineare Funktionale über einem linearen metrischen Raum[2]. Betrachtet man beispielsweise den Raum $\mathcal{S}$ der schneller als jede Potenz abfallenden und unendlich oft differenzierbaren Funktionen, dann definiert

$$\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$$

eine Distribution. Ein konkretes Beispiel dafür ist die δ-Distribution

$$\delta(f) := f(0), \quad f \in \mathcal{S},$$

die jeder Funktion ihren Funktionswert an der Stelle 0 zuordnet.

Distributionen können als Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes aufgefasst werden. Denn erstens definiert jede Funktion über die Vorschrift

$$\phi(f) = \int f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Distribution, denn das Integral über das Produkt einer beliebigen Funktion ϕ mit einer Testfunktion genannten Funktion f ist schon einmal ein lineares Funktional. Umgekehrt legen eine Vielzahl von Distributionen auf eben diesem Wege auch eine Funktion ϕ eindeutig fest. Aber nicht jede Distribution definiert auf diese Weise eine Funktion. Das heißt, dass zwar zu jeder Funktion in eineindeutiger Weise eine Distribution existiert, es aber darüber hinaus noch mehr Distributionen gibt, die sich nicht als Funktion fassen lassen. Wenn man beispielsweise versucht, die δ-Distribution als Integral über eine δ-Funktion zu schreiben, also versuchsweise

$$\delta(f) = \int f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x$$

ansetzt, so erkennt man, dass dieses bestenfalls nur eine symbolische Schreibweise sein kann, denn eine Funktion $\delta(x)$, die dieses leistet, kann nicht konsistent definiert werden.

[2] Schwartz 1950; für eine moderne Darstellung siehe etwa Großmann 1988

Möchte man trotzdem nicht auf diese Schreibweise verzichten, so spricht man von $\delta(x)$ als «uneigentlicher» Funktion. Im Sinne uneigentlicher Funktionen sind Distributionen schon lange in der Physik in Gebrauch.

1.4 Historischer Überblick

In der folgenden Tabelle sind einige Eckwerte zur Geschichte der Distributionen aufgelistet[3].

	Prätheoretischer Gebrauch	
1882	Gustav Kirchhoff	Das Huyghens'sche Princip
1893	Oliver Heaviside	Operational Calculus
1910	Arnold Sommerfeld	Zackenfunktion
1924	Richard Courant	Einheitskraft
1926	Cornelius Lanczos	Einheitskern
	Quasitheoretischer Gebrauch	
1927	Paul A. M. Dirac	δ-Funktion
1928	Pauli und Jordan	relativistische δ-Funktion
1929	Pauli und Heisenberg	Vertauschungsrelationen der QFT
1932	Bohr und Rosenfeld	Prinzipien der QFT
	Theoretischer Gebrauch	
1936	S. Sobolev	Verallgemeinerte Funktionen
1945	Laurent Schwartz	Theorie der Distributionen
$\sim$ 1950	E. C. G. Stückelberg	Mehrere Arbeiten zur S-Matrixtheorie
	A. S. Wightman	Axiomatische Feldtheorie
	N. N. Bogoljubov	Kausale Störungstheorie

In der ersten Phase spreche ich vom prätheoretischen Gebrauch, weil die δ-Funktion in den genannten Arbeiten jeweils nur an einer einzigen Stelle aus Gründen der rechentechnischen Zweckmäßigkeit auftaucht – wobei Heaviside hier sicherlich als Ausnahme gelten dürfte.

Die Ära des quasitheoretischen Gebrauchs beginnt mit Diracs Einführung der δ-Funktion in die Quantenmechanik 1927. Im Unterschied zu seinen Vorläufern gibt Dirac erstmals eine allgemeine Definition der δ-Funktion als eigenständigem mathematischen Objekt und stellt gleich einen ganzen Satz von Rechenregeln zusammen. Weil er aber

[3] für eine genauere Darstellung siehe etwa Peters 2004

keine widerspruchsfreie Definition angeben kann, prägt er den Namen «uneigentliche Funktion». Diracs δ-Funktion begann so ihren Siegeszug in der Physik und schon bald tauchten auch relativistische Verallgemeinerungen der δ-Funktion für den Lichtkegel auf. Mitte der 40er Jahre entwickelte Laurent Schwartz schließlich die Theorie der Distributionen, die ein solides mathematisches Fundament legte. Seit den 50er Jahren sprachen sich die Ergebnisse von Schwartz auch in der Physik herum, und seitdem sehen wir einige Versuche, aus dem nun verstandenen mathematischen Wesen der δ-Funktion und ihrer Verwandten auch physikalisch Kapital zu schlagen.

Aus dieser historischen Entwicklung seien nun drei Beispiele ausgewählt:

1. Die Diskussion um Diracs Deltafunktion in der Quantenmechanik.
2. Die Wightmansche Axiomatisierung der Quantenfeldtheorie.
3. Die Versuche von Stückelberg und Bogoljubov und ihrer Mitarbeiter, eine mathematisch wohldefinierte Störungstheorie zu finden.

An diesen Beispielen soll gezeigt werden, dass die Versuche, aus der quasitheoretischen Formulierung herauszufinden und eine von vorne bis hinten mathematisch wohldefinierte Theorie zu haben, keineswegs, wie oft unterstellt, nur eine mathematische Spitzfindigkeit sind. Vielmehr soll gezeigt werden, dass die mathematische Strenge in jedem dieser Fälle dazu dient, die Theorie physikalischer, realistischer und phänomenologisch strenger zu machen – also auf Unbeobachtbares zu verzichten und die Mathematik direkt an den Tatsachen ansetzen zu lassen.

2 Die δ-Funktion in der Quantenmechanik: Dirac und von Neumann

2.1 Dirac und δ-Funktion in der Quantenmechanik

Dirac stieß im Jahre 1927 auf die δ-Funktion, als er versuchte, Schrödingers Wellenmechanik und Heisenbergs Matrizenmechanik zu einer einheitlichen Theorie zu verschmelzen[4]. In seiner Transformationstheorie versuchte er, Schrödingers Differentialgleichung aus den Matrizen

[4] Dirac 1927

Heisenbergs herzuleiten. Kurz gesagt steht dahinter folgende Idee:[5] Die Eigenwertgleichung ist bei Heisenberg eine Gleichung für Matrizen, bei Schrödinger eine Eigenwertgleichung für einen Differentialoperator.

$$\sum_{\nu} h_{\mu\nu} x_\nu = \lambda x_\mu \qquad \text{(Heisenberg)} \qquad (1)$$

$$H\psi(q_1, \ldots, q_k) = \lambda\psi(q_1, \ldots, q_k) \qquad \text{(Schrödinger)} \qquad (2)$$

Um nun eine vollständige formale Analogie beider Gleichungen herzustellen, müsste man Schrödingers Differentialoperator in einen Integraloperator umschreiben

$$H\psi(q) = \int_\Omega \mathrm{d}q'\, h(q, q')\psi(q')\,,$$

so dass nun (2) die Form

$$\int_\Omega \mathrm{d}q'\, h(q, q')\psi(q') = \lambda\psi(q) \qquad \text{(Schrödinger-Dirac)} \qquad (3)$$

annimmt.

Die Ausdrücke (1) und (3) sind nun völlig analog, und man kann die zweite Variante einfach als kontinuierliche Verallgemeinerung der ersten ansehen.

Um aber mit solchen Integraloperatoren tatsächlich wie mit kontinuierlichen Matrizen rechnen zu können, braucht es natürlich auch eine – und zwar kontinuierliche – Einheitsmatrix. Von so einer Einheitsmatrix δ wäre dann folgende Eigenschaft zu verlangen:

$$\int f(x)\delta(x - x')\,\mathrm{d}x = f(x')$$

Dirac findet diese Einheitsmatrix in der δ-Funktion, die er folgendermaßen definiert:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad \text{und} \quad \int \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad (4)$$

An dieser Definition ist die Tatsache, dass $\delta(x)$ keine ordentliche Funktion sein kann, sehr schön zu erkennen. Das Integral über eine Funktion,

[5] Der Kürze halber folge ich hier nicht Diracs Argumentation, sondern der summarischen Zusammenfassung von Neumann 1932. Diracs eigene Darstellung wird ausführlich in Peters 2004 referiert und diskutiert.

die fast überall 0 ist, kann nämlich im Rahmen der Standardanalysis nicht 1 sein. Die Definition ist also nicht konsistent und die δ-Funktion damit mathematisch in sich widersprüchlich. Die δ-Funktion existiert nicht als Funktion im eigentlichen Sinn.

Da man aber mit der δ-Funktion in weiten Teilen trotz allem sehr erfolgreich, wenn auch «uneigentlich» rechnen kann, hält Dirac am Gebrauch der δ-Funktion fest, und da sie direkt in der Formulierung der Grundlagen der Transformationstheorie auftaucht, wird sie sogar einer der formalen Grundbausteine seiner Theorie.

Da sich Diracs Grundidee für den Formalismus schnell durchsetzte, findet man heute die δ-Funktion an vielen wichtigen Stellen im formalen Aufbau der Quantenmechanik. Die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelation

$$\int \mathrm{d}x\, \psi_y^*(x)\psi_{y'}(x) = \delta(y - y')$$

$$\sum_n \psi_n^*(x')\psi_n(x) = \delta(x - x')$$

sind extrem wichtig für den praktischen Gebrauch des Formalismus: Durch sie wird die Theorie in ihrer Logik so anschaulich wie lineare Algebra im dreidimensionalen Raum. Als Eigenfunktion z. B. des Ortsoperators

$$x\Psi(x) = x'\Psi(x) \implies \Psi(x) = \delta(x - x')$$

hat die δ-Funktion auch einen gewissen physikalischen Gehalt.

Die δ-Funktion ergibt also trotz, oder eigentlich gerade wegen ihrer mathematischen Defekte den unschätzbaren Vorteil, dass alle Phänomene (diskretes und kontinuierliches Spektrum) der Quantenmechanik formal einheitlich beschrieben werden können. Mit dem Formalismus kann relativ leicht und anschaulich gerechnet werden, und gerade das macht die vielzitierte Eleganz und Durchsichtigkeit von Diracs Formalismus aus.

2.2 Von Neumann und die Spektraltheorie

Wir kommen nun zu dem ersten Beispiel für einen mathematisch korrekten Gegenentwurf, der die mathematischen Defekte des Rechnens mit uneigentlichen Funktionen vermeidet. Von Neumann entwickelte seine

Spektraltheorie ab 1927[6]. Die Spektraltheorie unbeschränkter Operatoren auf dem Hilbertraum ist aber keine Explizierung und Präzisierung der Diracschen Methoden, sondern bedient sich von vornherein eines ganz anders gearteten Aufbaus. In dieser historischen Phase besteht die mathematisch korrekte Behandlung also nicht darin, den Fehler in Diracs Theorie damit zu beheben, die δ-Funktion mathematisch korrekt zu definieren und damit mathematisch korrekt zu rechnen. Vielmehr wählt von Neumann einen ganz anderen Weg, bei dem die δ-Funktion von vornherein gar nicht erst auftaucht und zum Problem werden kann.

Weil aber Diracs Formalismus so elegant war, führte von Neumanns Gegendarstellung verbreitet zu der Meinung, es ginge den Mathematikern um unnötige Spitzfindigkeiten, die mit Physik nichts zu tun hätten. Deshalb hielten die Physiker, und tun es im Grunde bis heute, am nur quasitheoretischen Gebrauch der δ-Funktion fest. Ich möchte demgegenüber im Folgenden zeigen, dass und wie von Neumanns Theorie gemäß meiner Ausgangsthese bis in die Einzelheiten seiner mathematischen Argumentation von der Grundidee durchzogen ist, dass die mathematischen Defekte auch jeweils physikalische Defekte sind, sofern man die Kopenhagener Forderung nach phänomenologischer Strenge ernst nimmt. Dabei werden wir sehen, wie sich die mathematischen Probleme lösen, sobald man versucht, den Formalismus streng entlang der beobachtbaren Tatsachen der Physik aufzubauen.

Von Neumann beschreibt seine Motivation 1927 folgendermaßen:

> «Ein gemeinsamer Mangel aller dieser Methoden ist aber, dass sie prinzipiell unbeobachtbare und physikalisch sinnlose Elemente in die Rechnung einführen [...]. Die als Schlußresultate erscheinenden Wahrscheinlichkeiten sind zwar invariant, es ist aber unbefriedigend und unklar, weshalb der Umweg durch das nicht-beobachtbare und nicht-invariante notwendig ist.»[7]

Von Neumanns Spektraltheorie ist also Ausdruck seiner Suche nach dem, was anfangs «phänomenologische Strenge» genannt wurde.

Das soll nun an der Argumentation von Neumanns im Einzelnen verdeutlicht werden[8]. Setzen wir an der Stelle ein, wo auch Diracs Trans-

[6] von Neumann 1927
[7] von Neumann 1927
[8] Ich folge hier der Darstellung in von Neumann 1932

formationstheorie beginnt: der Vereinheitlichung des Schrödingerschen und Heisenbergschen Ansatzes.

Von Neumann zeigt, dass der Unterschied der beiden Formulierungen (1) und (2) vor allem in der Benutzung unterschiedlicher Funktionenräume besteht, nämlich des Raumes quadratsummabler Folgen ℓ_2 bei Heisenberg, und des Raumes quadratintegrabler Funktionen $\mathcal{L}_2$ bei Schrödinger. Entscheidend ist nun die Erkenntnis, dass diese verschiedenen Funktionenräume physikalisch schon äquivalent sind, d. h. phänomenologisch kein Unterschied zwischen ihnen besteht. Während Dirac an dieser Stelle noch versucht, mithilfe der δ-Funktion den Differentialoperator in einen Integraloperator umzuschreiben, zeigt von Neumann, dass es hier keiner Brücke und keiner Analogie bedarf. Denn wenn physikalisch gar nichts daran liegt, ob man in einem Raum von Funktionen oder aber von Folgen arbeitet, ist der den Tatsachen angemessene mathematische Begriff eben eine Abstraktionsstufe höher gelegen. So führt von Neumann den abstrakten Hilbertraum ein, zu dem Heisenbergs und Schrödingers Formulierungen nur spezielle Darstellungen sind. Die Hilbertraumformulierung ist nun mathematisch wohldefiniert, und eine Theorie kontinuierlicher Matrizen und damit wird die Einführung der δ-Funktion von vornherein überflüssig.

Nun trifft aber auch die Formulierung des Eigenwertproblems im Hilbertraum

$$Hf = \lambda f$$

noch nicht ganz das physikalische Problem. Denn die Eigenvektoren f entsprechen auch in dieser Formulierung noch nicht dem phänomenologisch in der Physik Gegebenen, da die Zuordnung nicht eindeutig erfolgen kann. Denn erstens sind die Eigenfunktionen durch diese Gleichung nur bis auf einen nicht-observablen Phasenfaktor $e^{i\phi}$ festgelegt, und zweitens sind auch verschiedene Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert physikalisch nicht zu unterscheiden.

Von Neumann löst dieses Problem damit, dass er sich fragt, was denn die physikalisch sinnvollen und unterscheidbaren Grundeinheiten wären. Wiederum liegt die Antwort eine mathematische Abstraktionsstufe höher: Erst der gesamte Unterraum der zu einem Eigenwert gehörigen Eigenvektoren entspricht den physikalisch vorliegenden

Objekten. Daher macht er eben diese Unterräume mit der Definition der Spektralprojektoren zu den Grundbausteinen seiner Theorie.

Die Einführung der Spektralprojektoren stützt sich damit vor allem auf die Eliminierung unphysikalischer Freiheitsgrade. Dabei zeigt sich, dass auf dem so gewonnenen Abstraktionsniveau auch das mathematische Problem wohldefiniert wird.

Auch die Eigenfunktionen zum Ortsoperator, die mit der δ-Funktion dargestellt werden, haben physikalisch keinerlei Bedeutung, sondern entsprechen Zuständen mit 100 % scharf definiertem Ort, was bekanntlich prinzipiell kein mögliches Messergebnis ist. In der Spektraltheorie kommt auch dieser Begriff gar nicht erst vor. Von Neumann schreibt hierzu:

> «(Nebenbei sei erwähnt, dass die [...] Einführung «uneigentlicher» oder nicht zum Hilbertschen Raume gehöriger Eigenfunktionen [...] gerade hier die Wirklichkeit schlechter wiedergibt als unser Verfahren. Denn sie täuscht die Existenz solcher Zustände vor, in denen Größen mit Streckenspektrum gewisse Werte genau annehmen, obwohl gerade dies nie vorkommt. Wir glauben, neben ihrer mathematischen Unhaltbarkeit, auch aus diesem Grunde derartige Idealisationen ablehnen zu müssen, obwohl diese mehrfach vorgeschlagen wurden.)»[9]

Insgesamt zeigt sich, dass die mathematische Idealisation der δ-Funktion in allen Fällen einer nicht-beobachtbaren physikalischen Idealisierung entspricht. Die mathematische konsistente Formulierung wird gerade dadurch erreicht, dass die «Umwege durch das Unbeobachtbare» vermieden werden. Mathematische Strenge entsteht hier aus phänomenologischer Strenge und umgekehrt.

Dafür, dass diese Aussage für von Neumanns gesamte Einstellung zu Mathematik und Physik charakteristisch ist, gibt es starke historische Hinweise[10]. Dabei stellt sich aber nun die Frage, ob sich in dieser biographischen vielleicht auch eine *sachliche* Tatsache über den inneren Zusammenhang von Mathematik und Physik verbirgt. Diese Möglichkeit aufzuzeigen, ist Aufgabe des nächsten Abschnitts, der zwei weitere, aber anders geartete Beispiele darstellt.

[9] von Neumann 1932, S.117
[10] Rédei 1996; siehe auch die Diskussion des Themas in Peters 2004

3 Distributionen in der Quantenfeldtheorie

Betreten wir nun den Bereich der Quantenfeldtheorie, so zeigt sich, dass sich das mathematische Problem der δ-Funktion in der Physik noch entschieden verschärft: Sobald Felder quantisiert werden sollen, müssen die Vertauschungsrelationen für unendlich viele Freiheitsgrade formuliert werden. Daher taucht die δ-Funktion schon in den Vertauschungsrelationen der Feldgrößen auf[11]:

$$[P_r(t,\vec{x}), Q_s(t,\vec{x})] = \mathrm{i}\hbar\delta_{rs}\delta(\vec{x}-\vec{x'})$$

Damit ist die Deltafunktion nun endgültig ins Herz der Theorie gerutscht, denn die Vertauschungsrelationen definieren die gesamte Observablenalgebra. Da uneigentliche Funktionen nun am Anfang der Theorie stehen, sind mathematische Probleme natürlich vorprogrammiert. Das bekannteste dieser Probleme ist sicher das Divergenzproblem in der Quantenelektrodynamik, das unter dem Stichwort Renormierung bekannt ist.

3.1 Bohr und Rosenfeld: Verschmierte Felder

In dem betrachteten Zusammenhang stellt sich nun zuerst die Frage, was nun in der Quantenfeldtheorie «phänomenologisch streng» bedeuten soll. Was sind in der Feldtheorie die messbaren Tatsachen und welche klassischen Größen erweisen sich als prinzipiell unbeobachtbar?

Die Analyse, was in der quantisierten Feldtheorie eigentlich messbar ist und was nicht, geht auf eine berühmte Arbeit von Bohr und Rosenfeld aus dem Jahre 1933 zurück[12]. Bohr und Rosenfeld stellen sich der Frage, inwieweit sich die Prinzipien der Quantentheorie in der Feldtheorie auswirken.

Ein klassisches Feld ordnet bekanntlich jedem Raumzeitpunkt x bestimmte Feldkomponenten ϕ zu und wird deshalb durch eine an jedem Raumzeitpunkt definierte Funktion $\phi(x)$ beschrieben. Die Idee dieses punktweise definierten Feldes beruht nun offenbar auf der Idealisation, das Feld sei auch punktweise, also durch Punktladungen auszumessen.

[11] Heisenberg und Pauli 1929

[12] Bohr und Rosenfeld 1933; siehe auch Heisenberg 1931

In der Quantenmechanik muss demgegenüber beachtet werden, dass die Messungen in Wirklichkeit nur mit hinreichend grossen Probekörpern gemacht werden können. Probekörper endlicher Ausdehnung messen aber nur Mittelwerte in bestimmten Raum-Zeit-Gebieten. Die klassische Idee des Feldes als punktweise definiertem Objekt ist also nicht eins zu eins in die Quantentheorie übertragbar, da das Feld faktisch gar nicht punktweise auszumessen ist.

> «Dieser Umstand findet seinen sinngemäßen Ausdruck gerade im quantenelektromagnetischen Formalismus, in welchem die Feldgrößen nicht mehr durch eigentliche Punktfunktionen dargestellt werden, sondern durch Funktionen von Raumzeitgebieten, die formal den Mittelwerten der idealisierten Feldkomponenten über die betreffenden Gebiete entsprechen.»[13]

Dem punktweise definierten Feld $\phi(x)$, das mathematisch durch eine Funktion beschrieben wird, bleibt bestenfalls eine rein formale, korrespondenzmäßige Bedeutung. Die physikalische Grundtatsache ist nun das «verschmierte Feld»

$$\int f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

welches den Mittelwert der Feldkomponenten formal als gewichtetes Integral über bestimmte Gebiete der Raumzeit beschreibt.

3.2 Wightman und die Axiomatisierung der Quantenfeldtheorie

Sobald nun geschichtlich der Begriff der Distribution vorliegt, erkennt man sofort, dass dieses «verschmierte Feld» nichts anderes als eben eine Distribution ist. Es liegt damit nahe, die Quantenfeldtheorie gemäß der Bohrschen Analyse direkt im Distributionssinne und damit sowohl phänomenologisch als auch mathematisch korrekt zu formulieren.

Nicht der erste, aber doch der bekannteste Versuch dieser Art ist die axiomatische Feldtheorie von Arthur Wightman[14]. Wightman und seine Mitarbeiter nahmen die Ideen Bohrs und Rosenfelds Anfang der

[13] Bohr und Rosenfeld 1933
[14] Wightman und Garding 1964

50er Jahre auf und begannen mit ihrer strengen Umsetzung. Ausgangspunkt des axiomatischen Aufbaus ist jetzt das verschmierte Feld als operatorwertige Distribution

$$\phi(f) \equiv \int f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}^4x.$$

Der entscheidende Umschwung wird deutlich, wenn man beachtet, dass nur die linke Seite eine direkte mathematische Bedeutung besitzt und die Integraldarstellung auf der rechten Seite der Gleichung nur heuristischen Wert hat. Es wird jetzt nicht mehr zunächst das ideale punktweise Feld betrachtet und dann mit einer Testfunktion verschmiert, sondern das Feld ist jetzt von vornherein eine Distribution und die Integraldarstellung auf der rechten Seite ist nichts weiter als eine begriffliche Reminiszenz an das Korrespondenzprinzip.

Von dem Feld als Distribution ausgehend entwickelt Wightman dann einen abstrakten und mathematisch korrekten Aufbau der Quantenfeldtheorie. Da bei dem hier dargelegten Ausgangspunkt die mathematischen Eigenheiten der Distributionen beachtet werden müssen, ergibt sich natürlicherweise eine enorme Komplexitätssteigerung der Mathematik. Hier zeigt sich wieder, wie vorher schon bei von Neumann, dass das phänomenologisch Gegebene mathematisch nicht notwendigerweise einfach ist, so dass dem Phänomenologen nichts anderes übrig bleibt, als sich die Mathematik, so komplex sie auch sei, von der Natur der Sache diktieren zu lassen. So schreiben Streater und Wightman in ihrem Buch[15] *PCT, Spin and Statics and all that* in der Einleitung:

> "Later on in the book there is a good deal of muttering about domains of unbounded operators. There is a general feeling among physicists that anything that depends in an important way on such matters cannot be physics. We would like to offer some arguments to the contrary."[16]

3.3 Stückelberg und Bogoljubov: Kausale Störungstheorie

Das dritte Beispiel zur Veranschaulichung der Parallelität von mathematischer und phänomenologischer Strenge kommt aus der angewandten Quantenfeldtheorie, wobei «angewandt» hier den Zweig

[15] Streater und Wightman 1964
[16] Streater und Wightman 1964

meint, der tatsächlich die Ausgänge von Experimenten berechnet, etwa die Quantenelektrodynamik mit ihrer Berechnung von Lamb-Shift etc. Diese Phänomene führen im gewöhnlichen Formalismus bekanntlich zu Divergenzen, das heißt, die ausgerechneten Größen sind unendlich groß. In der auf Feynman[17], Schwinger[18] und Dyson[19] zurückgehenden Lösung werden die Divergenzen dadurch bereinigt, dass man die entsprechenden Ausdrücke regularisiert, also die Unendlichkeiten im Nachhinein so von den Ergebnissen abzieht, dass ganz am Ende die Ergebnisse wieder mit den Messwerten übereinstimmen.

In dieser Problematik zeigt sich wieder einmal zweierlei: Erstens ist die mathematische Behandlung des Problems unbefriedigend und zweitens dreht sich das Ganze ohnehin um etwas prinzipiell Unbeobachtbares.

Nun gibt es zwei Ansätze, das mathematische Problem durch korrektes Rechnen mit Distributionen zu lösen und bezeichnenderweise beruhen beide Ansätze wiederum auf einem phänomenologisch strengen Ausgangspunkt. Gemeint sind die Arbeiten von Stückelberg und Mitarbeitern[20] einerseits und Bogoljubov und Mitarbeitern[21] andererseits, die hier summarisch als «kausale Störungstheorie»[22] bezeichnet werden sollen. Die kausale Störungstheorie beginnt mit einer alten phänomenologischen Idee Heisenbergs, der S-Matrix[23].

Um wenigstens einen ungefähren Eindruck der grundlegenden Ideen zu erhalten, betrachten wir einige stark vereinfachte Skizzen. Gegeben sei zum Beispiel eine experimentelle Situation in der Elementarteilchenphysik (Abbildung 1).

Wir sehen dort Felder, die in einen Wechselwirkungsbereich hineinlaufen, und die gestreuten Felder, die in irgendeiner Richtung wieder aus der Zone herauskommen.

---

[17] Feynman 1948 – 1949 b
[18] Schwinger 1948a - 1949 b
[19] Dyson 1949
[20] siehe dazu Stückelberg 1947, Stückelberg und Rivier 1948, 1950a, 1950 b, Stückelberg und Petermann 1953, Wanders 1956
[21] Bogoljubov und Shirkov 1955
[22] Eine moderne Darstellung der kausalen Störungstheorie für die Quantenelektrodynamik findet sich bei Scharf 1995
[23] Heisenberg 1943

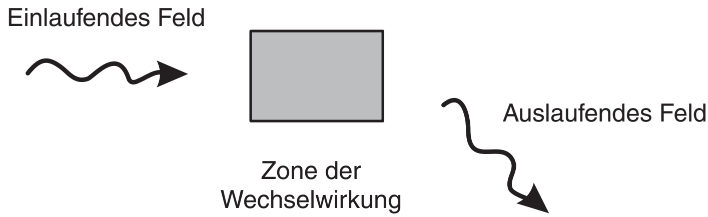

Abbildung 1
Skizze zur S-Matrix

Die gewöhnliche störungstheoretische Beschreibung des Streuvorgangs läuft de facto darauf hinaus, Ordnung für Ordnung detailliert aufzuschlüsseln, was in der Wechselwirkungszone passiert.

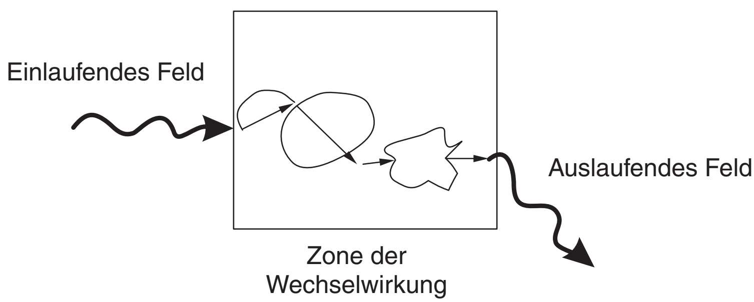

Abbildung 2
S-Matrix bei der Standardmethode

Wird sozusagen, wie in Abbildung 2 angedeutet, ein Vergrößerungsglas über die Wechselwirkung gehalten, so treten all die hier mit Feynman-Diagrammen skizzierten Prozesse zutage, die die bekannten Unendlichkeiten ergeben.

Die ursprüngliche Grundidee Heisenbergs kommt allerdings in der kausalen Störungstheorie besser zur Geltung. Die S-Matrix verknüpft die einlaufenden freien Felder mit den auslaufenden freien, gestreuten Feldern, die Wechselwirkungszone ist hier eine black box (Abbildung 3).

Der Idee nach sollten hier nur die tatsächlich in einem Streuexperiment beobachtbaren Größen – die ein- und auslaufenden freien Felder – in der Formulierung auftauchen und die intermediären, divergenten und unbeobachtbaren Prozesse gar nicht erst in der Theorie auftauchen. Dem Geiste nach führt diese Theorie Heisenbergs ursprüngliche Matrizenme-

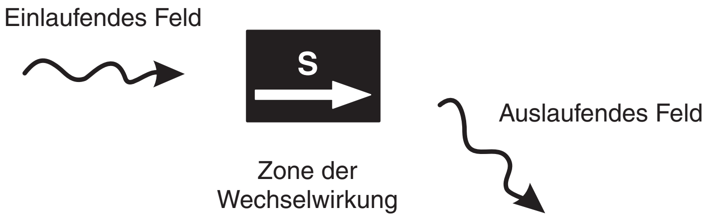

Abbildung 3
S-Matrix in der kausalen Störungstheorie

chanik fort: Was nicht beobachtet werden kann, hat in der Physik nichts zu suchen.

Kausale Störungstheorie bezeichnet nun grob gesprochen den Ansatz, die S-Matrix nicht aus einer detaillierten Lösung der Bewegungsgleichungen herzuleiten, sondern aus drei allgemeinen Prinzipien, nämlich Kausalität, Lorentzinvarianz und Unitarität.

Es zeigt sich, dass unter diesen Bedingungen eine störungstheoretische Entwicklung möglich ist und die S-Matrix tatsächlich Ordnung für Ordnung berechnet werden kann. Beim Durchführen der dafür nötigen Berechnungen zeigt sich aber dann deutlich, dass sich die unphysikalischen Divergenzen notwendig ergeben müssen, so lange man mit den auftretenden Distributionen nicht mathematisch korrekt umgeht.

Bei Durchführung der Rechnungen stößt man nämlich auf folgendes Problem: Die auftretenden Distributionen[24] müssen in einen avancierten und retardierten Anteil aufgespalten werden oder, anders gesagt, mit einer Stufenfunktion multipliziert werden. Das mathematische Problem liegt also in der Bildung von Produkten von Distributionen, eine Operation die zunächst einmal nicht definiert ist. Eine naive Multiplikation im Funktionssinne führt an dieser Stelle wieder zu den bekannten Divergenzen. Werden jedoch die mathematischen Eigenheiten von Distributionen beachtet, so kann es unter bestimmten Voraussetzungen gelingen, auch ein sinnvolles Produkt im Distributionssinne zu definieren[25] und die S-Matrix ohne Umweg durch das Unendliche zu berechnen. Auf diese Art und Weise kann die Störungstheorie von Anfang bis Ende endlich bleiben und in diesem Sinne gleichzeitig mathematisch korrekt

[24] genauer gesagt, die (Anti-)Kommutatorfunktionen der Felder
[25] Epstein und Glaser 1973; Scharf 1995

aufgebaut werden. Wie schon bei der axiomatischen Feldtheorie treten jedoch subtile mathematische Probleme auf, so dass dieses Programm erst von Epstein und Glaser 1973[26] erfolgreich ausgeführt werden konnte.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Alle drei vorgestellten Beispiele zeigen, dass die Versuche, die Physik mathematisch streng zu formulieren immer Hand in Hand mit einer phänomenologisch strengen Formulierung der Physik gehen und beide Aspekte nur zwei Seiten der gleichen Medaille zu sein scheinen. Einerseits zeigen die phänomenologischen Ansätze, dass das, was man für gewöhnlich für eine einfache Wahrnehmung der Wirklichkeit hält, von konzeptionellem Denken durchtränkt ist. Strenge zeigt sich hier als die Idee, denkerische Konzeptionen von der physikalischen Realität zu subtrahieren – hin zu reiner Wahrnehmung. Umgekehrt bedeutet Strenge für den gedanklich-konzeptionellen Bereich die Befreiung des Denkens von Wahrnehmungsinhalten – hin zu reinem Denken. Ersteres sehen wir in der Kopenhagener Deutung und da insbesondere in den Bohrschen Analysen am Werk; letzteres ist die Grundidee der formalen Axiomatik im Hilbertschen Sinne. In den diskutierten Beispielen zeigt sich nun, wie sich in der Idee der Strenge Wahrnehmung und Denken wechselseitig entmischen, und dass beides dadurch nicht nur voneinander sondern geradezu zueinander befreit wird.

Gesetzt den Fall, diese Beobachtungen ließen sich weiter erhärten: Welche Bedeutung hätte dann dieser Befund?

Ganz allgemein fällt hier etwas Befremdendes ins Auge. Denn unser Alltagsverständnis des Verhältnisses von Mathematik und Physik wird durch das Gesagte sozusagen auf den Kopf gestellt. Die Karikaturen vom weltfernen Mathematiker im Wolkenkuckucksheim und vom bodenständigen in der Realität lebenden Physiker tauschen hier offenbar die Rollen. Gerade die pragmatischen Physiker erscheinen hier als weltfremd und realitätsfern. Sie hantieren mit idealen Größen, die weder mathematisch einwandfrei sind, noch in Wirklichkeit beobachtet werden können. Schlimmer noch, die trockene, abstrakte mathematische Strenge

[26] Epstein und Glaser 1973

wird geradezu zu einem Kriterium für den prinzipiellen Realitätsgehalt der Theorie. In diesem Sinne könnte dieser Befund Motivation sein, das Verhältnis von Mathematik und Physik und ihren inneren Zusammenhang erneut zu durchdenken.

Dass und wie hier Wahrnehmung und Denken erst in ihrer schärfsten Trennung am Innigsten zueinander finden, könnte für künftige Forschungen ein fruchtbarer Anhaltspunkt sein, sich zu der Kardinalfrage der mathematischen Naturwissenschaft vorzutasten, die von Einstein einst so formuliert wurde[27]:

> «An dieser Stelle nun taucht ein Rätsel auf, das Forscher aller Zeiten so beunruhigt hat. Wie ist es möglich, dass die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt? Kann denn die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch bloßes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?»

5 Literaturverzeichnis

Bogoljubov, N. N.; Shirkov, D. V.: Probleme der Quantentheorie der Felder, dt. Übersetzung. In: Fortschritte der Physik 3: 439, 1955. Original erschienen in: Uspechi Fiz.Nauk 55: 149, 1955.

Bohr, N.; Rosenfeld, L.: Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen In: Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Mathematisk-Fysiske Meddelelser 12 No. 8, 1933.

Dirac, P. A. M.: The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics. In: Proceedings of the Royal Society London A113: 621 – 641, 1927.

Dyson, F.: The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman. In: Physical Review 75: 486, 1949.

Dyson, F.: The S-Matrix in Quantum Electrodynamics. In: Physical Review 75: 1736, 1949.

Epstein, H.; Glaser, V.: The Role of Locality in Pertubation Theory. In: Annales de l'Institut Poincaré A19: 211, 1973

Feynman, R. P.: Relativistic cut-off for quantum electrodynamics. In: Physical Review 74: 939, 1948.

[27] Albert Einstein am 27.11.1921 vor der preußischen Akademie der Wissenschaften

Feynman, R. P.: The theory of positrons. In: Physical Review 76: 749, 1949.

Feynman, R. P.: Space-time approach to quantum electrodynamics. In: Physical Review 76: 769, 1949.

Großmann, Siegfried: Funktionalanalysis. 4. Auflage; Wiesbaden: Aula Verlag 1988.

Heisenberg, W.: Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. In: Zeitschrift für Physik 33: 879, 1925. Wiedergedruckt in Born, M.; Heisenberg, W. und Jordan, P.: Begründung der Quantenmechanik. Stuttgart: Battenberg, 1962.

Heisenberg, W.: Über Energieschwankungen in einem Strahlungsfeld. In: Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften Leipzig, Mathematisch-physische Klasse 86: 317, 1931.

Heisenberg, W.: Die beobachtbaren Größen in der Theorie der Elementarteilchen. Zeitschrift für Physik 120: 513, 1943.

Heisenberg, W. und Pauli, W.: Zur Quantenelektrodynamik der Wellenfelder I. In: Zeitschrift für Physik 56: 1, 1929.

Neumann, John von: Mathematische Begründung der Quantenmechanik. In: Göttinger Nachrichten 1 – 57, 1927.

Neumann, Johann von: Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Verlag von Julius Springer 1932.

Peters, Klaus-Heinrich: Schönheit, Exaktheit, Wahrheit. Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen. Berlin, Diepholz: GNT-Verlag 2004.

Rédei, M.: Why John von Neumann did not Like the Hilbert Space Formalism of Quantum Mechanics (and what he Liked Instead). In: Studies in the History and Philosophy of Modern Physics 27: 493, 1996.

Scharf, G.: Finite Quantum Electrodynamics. 2nd ed. Berlin, Heidelberg New York: Springer 1995.

Schwartz, L.: Theorie des distributions. Paris: Hermann 1950.

Schwinger, J.: On quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron In: Physical Review 73: 416, 1948.

Schwinger, J.: Quantum Electrodynamics I. In: Physical Review 74: 1439, 1948.

Schwinger, J.: Quantum Electrodynamics II. In: Physical Review 75: 651, 1949.

Schwinger, J.: Quantum Electrodynamics III. In: Physical Review 76: 790, 1949.

Streater, R. F.: Wightman, A. S.: PCT, Spin and Statistics and all that. New York, Amsterdam: W. A. Benjamin 1964.

Stückelberg, E. C. G.: The present state of the S-Operator theory. In: Report of an International Conference on fundamental particles … London: The Physical Society 1947

Stückelberg, E. C. G.; Rivier, D.: A convergent expression for the magnetic moment of the neutron (Letter). In: Physical Review 74: 218 und (Erratum) 986, 1948.

Stückelberg, E. C. G.; Rivier, D.: Causalité et structure de matrice S. In: Helvetica Physica Acta 23: 215, 1950.

Stückelberg, E. C. G.; Rivier, D.: A propos des divergences en theorie des champs quantifies. In: Helvetica Physica Acta 23: 236, 1950.

Stückelberg, E. C. G.; Petermann, A.: La normalisation des constantes dans la theorie des quanta. In: Helvetica Physica Acta 26: 499, 1953.

Wanders, G.: Kausale Formulierung der S-Matrixtheorie. In: Fortschritte der Physik 4: 611, 1956.

Wightman, A. S.: Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Values. In: Physical Review 101: 860, 1956.

Wightman, A. S.; Garding, L.: Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory. In: Arkiv for Fysik 28 nr 13: 129, 1964.